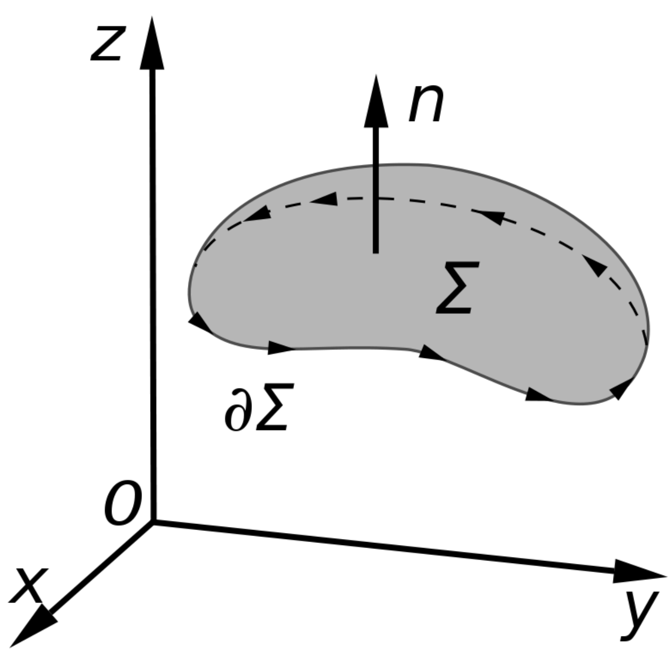
Aula 9

Teorema de Stokes

Teorema: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, isto é, uma variedade de dimensão 2, limitada, orientável e com bordo ∂S seccionalmente regular.
Seja $\mathbf{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe pelo menos C^1 no aberto Ω, com $S \cup \partial S \subset \Omega$. Então, tem-se

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu dS = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\gamma,$$

em que γ é um caminho que percorre ∂S com orientação compatível com a de ν (regra da mão direita).



Teorema de Stokes(-Cartan) Generalizado

Teorema: Seja M_m uma variedade com bordo, limitada, orientável e com bordo ∂M_{m-1} seccionalmente regular. Seja ω_{m-1} uma forma diferencial de grau $m-1$. Então

$$\int_{M_m} (d\omega_{m-1})_m = \oint_{\partial M_{m-1}} \omega_{m-1},$$

com a orientação induzida em ∂M_{m-1}.

Definição: Seja α_m uma forma diferencial de grau m.

- Diz-se que α_m é uma **forma fechada** se

$$d\alpha_m = 0.$$

- Diz-se que α_m é uma **forma exata** se existe uma forma ω_{m-1}, de grau $m-1$, tal que

$$\alpha_m = d\omega_{m-1}.$$

Proposição: Seja ω uma forma diferencial. Então

$$d(d\omega) = 0.$$

Ou seja, toda a forma exata é fechada.

Potenciais Vetoriais

Teorema: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto em estrela relativamente à origem e $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe $C^1(\Omega)$ incompressível, ou seja, tal que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$. Então

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \int_0^1 \mathbf{F}(tx, ty, tz) \times (tx, ty, tz) dt,$$

é um **potencial vetorial** de $\mathbf{F}$ em Ω, ou seja

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{F}.$$

Mais genericamente, centrando noutro ponto $p \in \mathbb{R}^3$ qualquer, dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um qualquer aberto em estrela centrado em p e $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe $C^1(\Omega)$ tal que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, existe sempre um potencial vetorial $\mathbf{A}$ (não único) de $\mathbf{F}$ em Ω.

Observação

Dado qualquer campo escalar $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $C^2(\Omega)$, se $\mathbf{A}$ é um potencial vetorial de $\mathbf{F}$ então $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \nabla\phi$ também é porque

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \underbrace{\operatorname{rot}(\nabla\phi)}_{=0} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{F}.$$

Então, fazendo $\phi = -\int A_1(x, y, z) dx$ é sempre possível escolher $\mathbf{B}$ com $B_1 = 0$, por exemplo. Idem para qualquer uma das outras duas componentes.